Среднее и среднеквадратичное

Расчетные формулы для основных форм сигналов в импульсных источниках питания (ИИП)

podkassetnik@yandex.ru

Оглавление

Основные определения

Пусть некая физическая величина (например, ток или напряжение), периодически изменяется во времени по определенному закону ***a(t)*** (*Рис. 1*), а период повторения величины равен ***T***. Тогда можно ввести понятия среднего и среднеквадратичного значения физической величины.

Рис. 1

Среднее значение физической величины за период – это среднее арифметическое мгновенных значений физической величины за период:

$$A_{сред} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt\,. \qquad (1)$$

Среднеквадратичное значение физической величины – это корень квадратный из среднего значения квадрата физической величины:

$$A_{скрвад} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)dt}\,. \qquad (2)$$

Если в формулы (1) и (2) в качестве функции ***a(t)*** подставить закон изменения переменного тока ***i(t)*** или напряжения ***u(t)***, получим среднее и среднеквадратичное значения тока или напряжения соответственно.

Если сложный закон изменения физической величины непрерывен, и его можно представить в виде суммы более простых участков (*Рис. 2*), то среднее и среднеквадратичное значения можно вычислить следующим образом:

$$A_{сред} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} a_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} a_2(t)dt + \ldots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} a_{n-1}(t)dt + \int_{t_{n-1}}^{T} a_n(t)dt\right], \qquad (3)$$

$$A_{скрвад} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} a_1^2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} a_2^2(t)dt + \ldots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} a_{n-1}^2(t)dt + \int_{t_{n-1}}^{T} a_n^2(t)dt\right]}\,. \qquad (4)$$

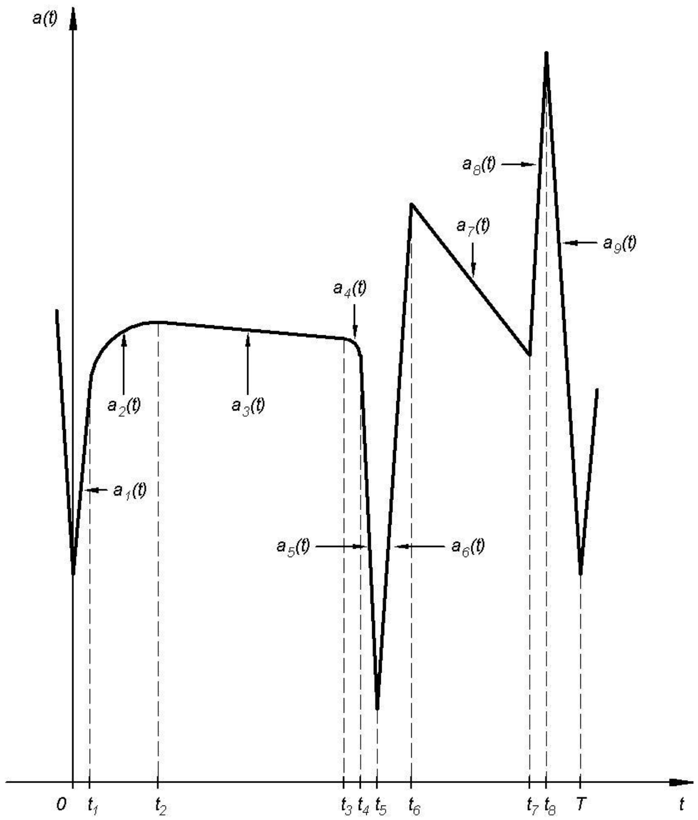


Рис. 2

Из формул (1) и (3) следует:

$$A_{сред} = A_{сред[1]} + A_{сред[2]} + \ldots + A_{сред[n-1]} + A_{сред[n]}, \qquad (5)$$

где

$$A_{сред[n]} = \frac{1}{T}\int_{t_{n-1}}^{t_n} a_n(t)dt\,. \qquad (6)$$

Из формул (2) и (4) следует:

$$A_{срквад} = \sqrt{A^2_{срквад[1]} + A^2_{срквад[2]} + \ldots + A^2_{срквад[n-1]} + A^2_{срквад[n]}}, \qquad (7)$$

где

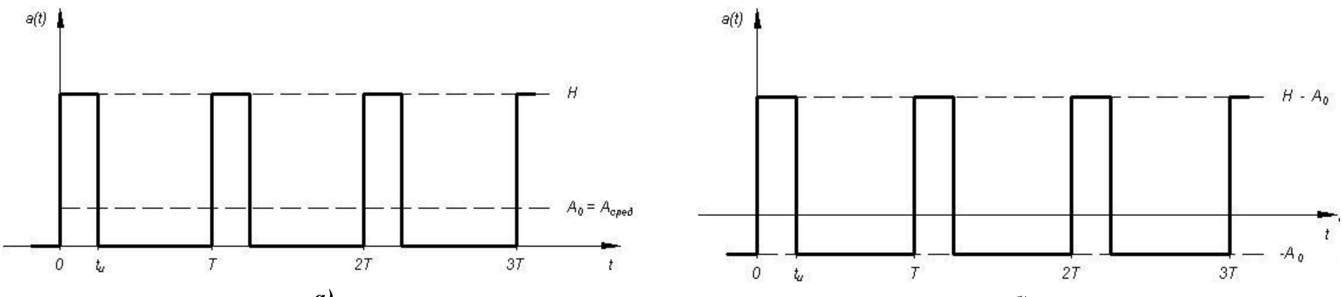
$$A_{срквад[n]} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_{n-1}}^{t_n} a_n^2(t)dt}\,. \qquad (8)$$

Формулы (5) и (7) указывают на простой способ определения среднего и среднеквадратичного значения физической величины, периодически изменяющейся во времени по сложному закону. Необходимо просто разложить сложный закон изменения на сумму нескольких «элементарных» законов, среднее и среднеквадратичное значения которых известны, а затем в зависимости от того, какое значение требуется определить, либо просуммировать средние «элементарные» значения, либо извлечь квадратный корень из суммы квадратов «элементарных» среднеквадратичных значений.

При расчете силовых трансформаторов и дросселей мощных ИИП часто приходится использовать значение постоянной составляющей и среднеквадратичное значение переменной составляющей тока через какую-либо обмотку. Постоянная составляющая любого закона изменения физической величины равна его среднему значению:

$$A_0 = A_{сред}. \tag{9}$$

Переменная же составляющая может быть получена путем вычитания из исходного закона изменения физической величины постоянной составляющей. В качестве примера на *Рис. 3* показан график переменной составляющей (*Рис. 3б*) для прямоугольного закона изменения физической величины без смещения (*Рис. 3а*).



а) ***б)***

Рис. 3

Поэтому в соответствии с формулой (7) среднеквадратичное значение переменной составляющей закона изменения физической величины можно вычислить как

$$A_{срквад(AC)} = \sqrt{A_{срквад}^2 - A_0^2} = \sqrt{A_{срквад}^2 - A_{сред}^2}. \tag{10}$$

Трапецеидальный закон изменения физической величины

Общий случай трапецеидального закона изменения физической величины показан на *Рис. 4* («нарастающая» трапеция) и на *Рис. 5* («спадающая» трапеция).

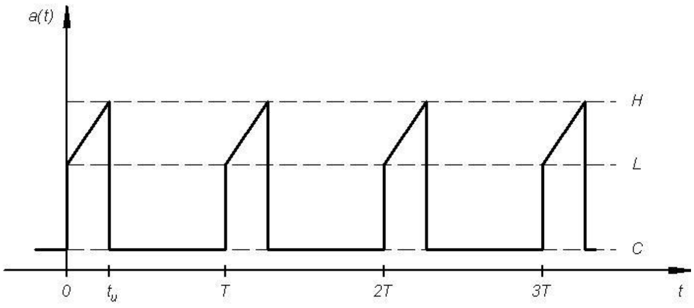


Рис. 4

«Нарастающая» трапеция

$$a(t)=\left[\begin{array}{l}0\le t\le t_и \Rightarrow L+\left(\dfrac{H-L}{t_и}\right)\cdot t\\ t_и\le t\le T\Rightarrow C\end{array}\right.$$

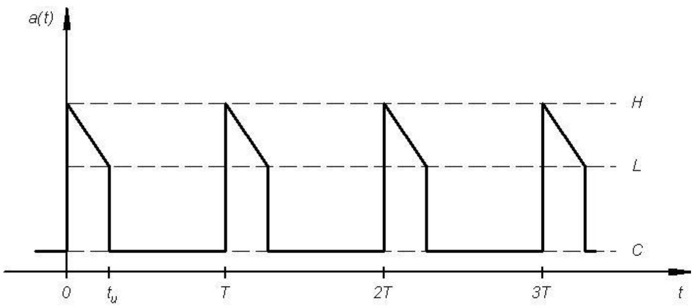


Рис. 5

«Спадающая» трапеция

$$a(t)=\left[\begin{array}{l}0\le t\le t_и \Rightarrow H-\left(\dfrac{H-L}{t_и}\right)\cdot t\\ t_и\le t\le T\Rightarrow C\end{array}\right.$$

Среднее значение:	$A_{сред}=\frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right)+\left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C$	(11)
Среднеквадратичное значение:	$A_{срквад}=\sqrt{\frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)+\left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C^2}$	(12)

Вывод среднего и среднеквадратичного значений проведем для «нарастающей» трапеции. Для «спадающей» трапеции вывод будет аналогичным.

Среднее значение:

$$A_{сред}=\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_и}\left(L+\frac{H-L}{t_и}\cdot t\right)dt+\int_{t_и}^{T}Cdt\right]=\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_и}Ldt+\int_0^{t_и}\frac{H-L}{t_и}\cdot tdt+\int_{t_и}^{T}Cdt\right]=\frac{1}{T}\left[L\cdot t\Big|_0^{t_и}+\frac{H-L}{t_и}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{t_и}+C\cdot t\Big|_{t_и}^{T}\right]=$$

$$=\frac{1}{T}\left[L\cdot t_и+\frac{H-L}{t_и}\cdot\frac{t_и^2}{2}+C\cdot(T-t_и)\right]=\frac{1}{T}\cdot\left[t_и\cdot\left(L+\frac{H-L}{2}\right)+C\cdot(T-t_и)\right]=\frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right)+\left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C\Rightarrow \underline{чтд}.$$

Среднеквадратичное значение

$$A_{сркв ад}=\sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_u}\left(L+\frac{H-L}{t_u}\cdot t\right)^2dt+\int_{t_u}^{T}C^2dt\right]}=\sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_u}\left(L^2+\frac{2L\cdot(H-L)}{t_u}\cdot t+\frac{(H-L)^2}{t_u^{\,2}}\cdot t^2\right)dt+\int_{t_u}^{T}C^2dt\right]}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{t_u}L^2dt+\int_0^{t_u}\frac{2L\cdot(H-L)}{t_u}\cdot tdt+\int_0^{t_u}\frac{(H-L)^2}{t_u^{\,2}}\cdot t^2dt+\int_{t_u}^{T}C^2dt\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\left[L^2t\Big|_0^{t_u}+\frac{2L\cdot(H-L)}{t_u}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{t_u}+\frac{(H-L)^2}{t_u^{\,2}}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{t_u}+C^2t\Big|_{t_u}^{T}\right]}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\left[L^2t_u+\frac{2L\cdot(H-L)}{t_u}\cdot\frac{t_u^{\,2}}{2}+\frac{(H-L)^2}{t_u^{\,2}}\cdot\frac{t_u^{\,3}}{3}+C^2\cdot(T-t_u)\right]}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\left[L^2t_u+L\cdot(H-L)\cdot t_u+\frac{H^2-2H\cdot L+L^2}{3}\cdot t_u+C^2\cdot(T-t_u)\right]}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot t_u\cdot\left[L^2+L\cdot H-L^2+\frac{H^2-2H\cdot L+L^2}{3}\right]+\frac{1}{T}\cdot C^2\cdot(T-t_u)}=$$

$$=\sqrt{\frac{t_u}{T}\cdot\left(L\cdot H+\frac{H^2-2H\cdot L+L^2}{3}\right)+\frac{T-t_u}{T}\cdot C^2}=\sqrt{\frac{t_u}{T}\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)+\left(1-\frac{t_u}{T}\right)\cdot C^2}\Rightarrow \underline{\textit{чтд}}.$$

Заметим, что значения ***H***, ***L*** и ***C*** могут быть любыми действительными числами.

Частным случаем трапецеидального закона изменения физической величины, наиболее интересным с точки зрения разработки импульсных источников питания, является т.н. трапеция без смещения (*Рис. 6*). Как видно из рисунка, для данного частного случая выполняется условие

$$C=0. \tag{13}$$

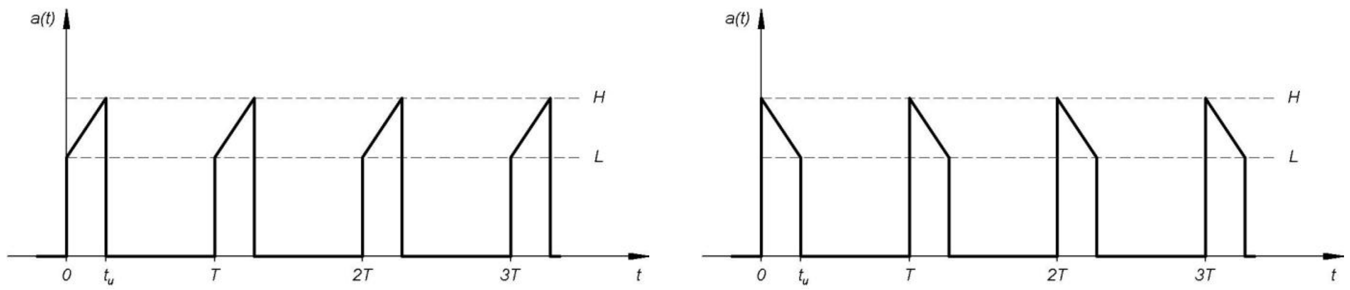


Рис. 6

Среднее значение:	$A_{сред}=\frac{t_u}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right)$ (14)
Среднеквадратичное значение:	$A_{сркв ад}=\sqrt{\frac{t_u}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)}$ (15)

Легко видеть, что формулы (14), (15) получены из формул (11) и (12) при использовании условия (13):

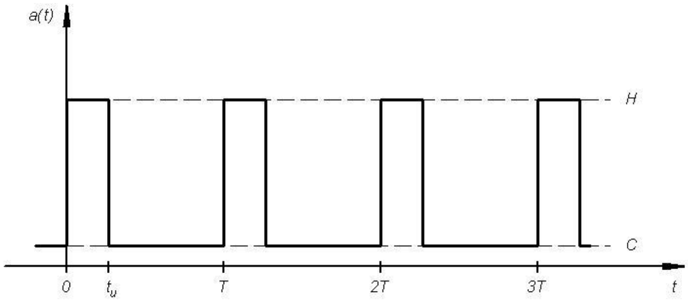
$$A_{сред} = \frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H+L}{2} \right) + \left(1 - \frac{t_u}{T} \right) \cdot 0 = \frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H+L}{2} \right);$$

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H^2 + L^2 + H \cdot L}{3} \right) + \left(1 - \frac{t_u}{T} \right) \cdot 0^2} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H^2 + L^2 + H \cdot L}{3} \right)}.$$

Прямоугольный закон изменения физической величины

Общий случай прямоугольного закона изменения физической величины показан на *Рис. 7*. Как видно из рисунка, данный закон является частным случаем трапецеидального закона изменения физической величины. Прямоугольник может быть получен из трапеции при выполнении условия

$$L = H \;. \qquad (16)$$



$$a(t) = \begin{cases} 0 \le t \le t_и \Rightarrow H \\ t_и \le t \le T \Rightarrow C \end{cases}$$

Рис. 7

Среднее значение:	$A_{сред} = \frac{t_и}{T} \cdot H + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C$ (17)
Среднеквадратичное значение:	$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_и}{T} \cdot H^2 + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C^2}$ (18)

Поскольку прямоугольник является частным случаем трапеции, нет необходимости вычислять среднее и среднеквадратичное значения при помощи интегралов. Для вывода выражений (17) и (18) воспользуемся формулами (11) и (12) совместно с условием (16).

Среднее значение

Совместное использование формулы (11) и условия (16) дает:

$$A_{сред} = \frac{t_и}{T} \cdot \left(\frac{H + H}{2}\right) + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C = \frac{t_и}{T} \cdot \left(\frac{2 \cdot H}{2}\right) + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C = \frac{t_и}{T} \cdot H + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C \Rightarrow \underline{чтд}.$$

Среднеквадратичное значение

Совместное использование формулы (12) и условия (16) дает:

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_и}{T} \cdot \left(\frac{H^2 + H^2 + H \cdot H}{3}\right) + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C^2} = \sqrt{\frac{t_и}{T} \cdot \left(\frac{3 \cdot H^2}{3}\right) + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C^2} = \sqrt{\frac{t_и}{T} \cdot H^2 + \left(1 - \frac{t_и}{T}\right) \cdot C^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>*чтд*</u>.

Частным случаем прямоугольного закона изменения физической величины, наиболее интересным с точки зрения разработчика импульсных источников питания, является т.н. прямоугольник без смещения (*Рис. 8*). Как видно из рисунка, для данного частного случая выполняется условие

$$C = 0. \tag{19}$$

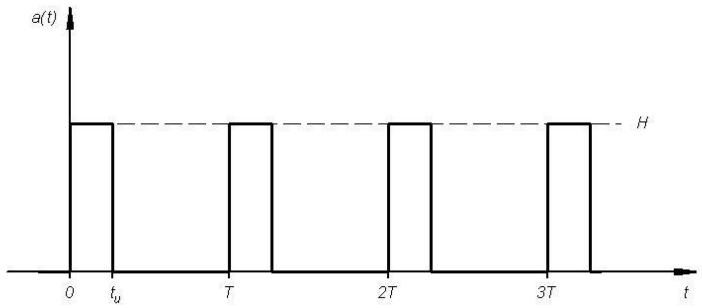


Рис. 8

<u>Среднее значение:</u>	$A_{сред} = \frac{t_u}{T} \cdot H$ (20)
<u>Среднеквадратичное значение:</u>	$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_u}{T}} \cdot H$ (21)

Отметим, что формулы (20) и (21) получены из формул (17) и (18) с использованием условия (19):

$$A_{сред} = \frac{t_u}{T} \cdot H + \left(1 - \frac{t_u}{T}\right) \cdot 0 = \frac{t_u}{T} \cdot H;$$

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot H^2 + \left(1 - \frac{t_u}{T}\right) \cdot 0^2} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot H^2} = \sqrt{\frac{t_u}{T}} \cdot H.$$

Треугольный закон изменения физической величины

Общий случай треугольного закона изменения физической величины показан на *Рис. 9* («нарастающий» треугольник) и на *Рис. 10* («спадающий» треугольник). Как видно из рисунка, данный закон является частным случаем трапецеидального закона изменения физической величины. Треугольник может быть получен из трапеции при выполнении условия

$$L = C. \tag{22}$$

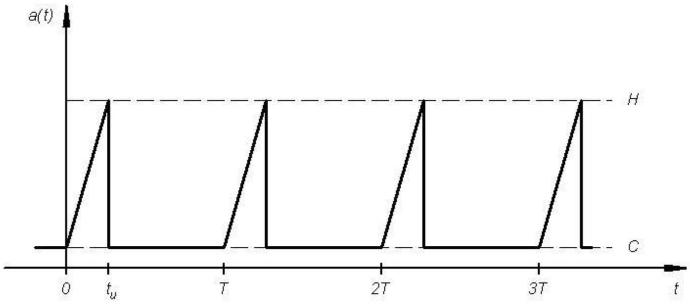


Рис. 9

«Нарастающий» треугольник

$$a(t) = \left[\begin{array}{l} 0 \le t \le t_и \Rightarrow C + \left(\dfrac{H-C}{t_и}\right)\cdot t \\ t_и \le t \le T \Rightarrow C \end{array}\right.$$

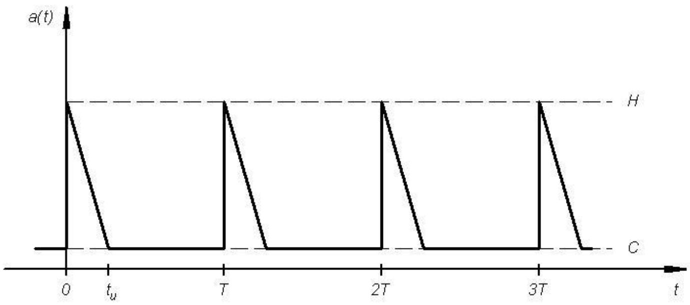


Рис. 10

«Спадающий» треугольник

$$a(t) = \left[\begin{array}{l} 0 \le t \le t_и \Rightarrow H - \left(\dfrac{H-C}{t_и}\right)\cdot t \\ t_и \le t \le T \Rightarrow C \end{array}\right.$$

Среднее значение:	$A_{сред} = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{t_и}{T}\cdot H + \left(2-\dfrac{t_и}{T}\right)\cdot C\right]$	(23)
Среднеквадратичное значение:	$A_{срквад} = \sqrt{\dfrac{t_и}{T}\cdot\left(\dfrac{H}{3}\right)\cdot(H+C) + \left(1-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{t_и}{T}\right)\cdot C^2}$	(24)

Поскольку треугольник является частным случаем трапеции, нет необходимости вычислять среднее и среднеквадратичное значения при помощи интегралов. Для вывода выражений (23) и (24) воспользуемся формулами (11) и (12) совместно с условием (22).

Среднее значение

Совместное использование формулы (11) и условия (22) дает:

$$A_{сред} = \frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H+C}{2}\right) + \left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C = \frac{t_и}{T}\cdot\frac{H}{2} + \frac{t_и}{T}\cdot\frac{C}{2} + C - \frac{t_и}{T}\cdot C = \frac{t_и}{T}\cdot\frac{H}{2} + C - \frac{t_и}{T}\cdot\frac{C}{2} = \frac{t_и}{T}\cdot\frac{H}{2} + \left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{t_и}{T}\right)\cdot C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t_u}{T} \cdot H + \left(2 - \frac{t_u}{T} \right) \cdot C \right] => \textit{чтд.}$$

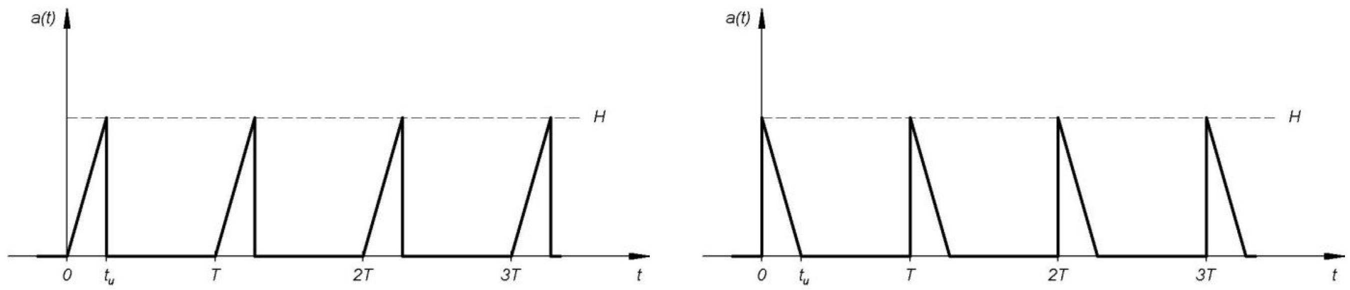
Совместное использование формулы (12) и условия (22) дает:

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H^2 + C^2 + H \cdot C}{3} \right) + \left(1 - \frac{t_u}{T} \right) \cdot C^2} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \frac{H^2}{3} + \frac{t_u}{T} \cdot \frac{C^2}{3} + \frac{t_u}{T} \frac{H \cdot C}{3} + C^2 - \frac{t_u}{T} \cdot C^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H^2}{3} + \frac{H \cdot C}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{t_u}{T} + 1 - \frac{t_u}{T} \right) \cdot C^2} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \frac{H}{3} \cdot \left(H + C \right) + \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{t_u}{T} \right) \cdot C^2} => \textit{чтд.}$$

Частным случаем треугольного закона изменения физической величины, наиболее интересным с точки зрения разработчика импульсных источников питания, является т.н. треугольник без смещения (*Рис. 11*). Как видно из рисунка, для данного частного случая выполняется условие

$$C = 0. \qquad (25)$$



а) ***б)***

Рис. 11

<u>Среднее значение:</u>	$A_{сред} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t_u}{T} \cdot H$ (26)
<u>Среднеквадратичное значение:</u>	$A_{срквад} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{t_u}{T}} \cdot H$ (27)

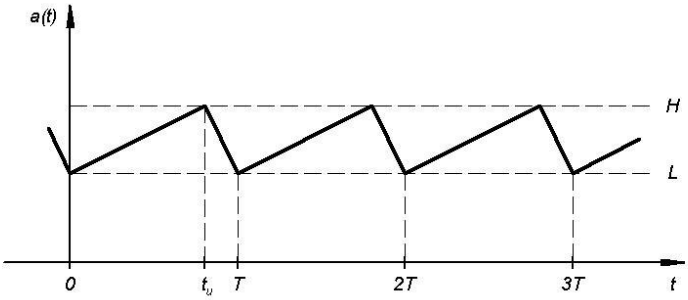
Отметим, что формулы (26) и (27) получены из формул (23) и (24) с использованием условия (25):

$$A_{сред} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t_u}{T} \cdot H + \left(2 - \frac{t_u}{T} \right) \cdot 0 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{t_u}{T} \cdot H;$$

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H}{3} \right) \cdot (H + 0) + \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{t_u}{T} \right) \cdot 0^2} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H}{3} \right) \cdot H} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \frac{H^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{t_u}{T}} \cdot H.$$

Пилообразный закон изменения физической величины

Общий случай прямоугольного закона изменения физической величины показан на *Рис. 12*.



$$a(t)=\begin{cases} 0\le t\le t_и \Rightarrow L+\left(\dfrac{H-L}{t_и}\right)\cdot t \\ t_и\le t\le T \Rightarrow H-\left(\dfrac{H-L}{T-t_и}\right)\cdot(t-t_и) \end{cases}$$

Рис. 12

Среднее значение:	$A_{сред}=\dfrac{H+L}{2}$	(28)
Среднеквадратичное значение:	$A_{срквад}=\sqrt{\dfrac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}}$	(29)

Вывод среднего и среднеквадратичного значений для пилообразного закона изменения физической величины проведем двумя способами: сначала для вывода воспользуемся формулами (5) и (7), а затем проверим полученный результат путем непосредственного вычисления интегралов.

Отметим, что пилообразный закон изменения физической величины может быть представлен в виде суммы двух трапеций без смещения – «нарастающей» и «спадающей» (*Рис. 13*). При этом длительность «нарастающей» трапеции равна $\boldsymbol{t_и}$, а длительность «спадающей» – $\boldsymbol{(T\text{-}t_и)}$. Поэтому в соответствии с формулами (14) и (15) для «нарастающей» трапеции будем иметь:

$$A_{сред[1]}=\frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right),$$

$$A_{срквад[1]}=\sqrt{\frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)},$$

а для «спадающей»:

$$A_{сред[2]}=\frac{(T-t_и)}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right),$$

$$A_{срквад[2]}=\sqrt{\frac{(T-t_и)}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)}.$$

Теперь по формулам (5) и (7) можно определить среднее и среднеквадратичное значения для пилообразного закона изменения физической величины:

$$A_{сред} = A_{сред[1]} + A_{сред[2]} = \frac{t_u}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right) + \frac{(T-t_u)}{T}\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right) = \left(\frac{t_u+(T-t_u)}{T}\right)\cdot\left(\frac{H+L}{2}\right) = \frac{H+L}{2} \Rightarrow \underline{чтд},$$

$$A_{срквад} = \sqrt{A^2_{срквад[1]} + A^2_{срквад[2]}} = \sqrt{\frac{t_u}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right) + \frac{(T-t_u)}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{t_u}{T} + \frac{(T-t_u)}{T}\right)\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)} = \sqrt{\left(\frac{t_u+(T-t_u)}{T}\right)\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)} = \sqrt{\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)} \Rightarrow \underline{чтд}.$$

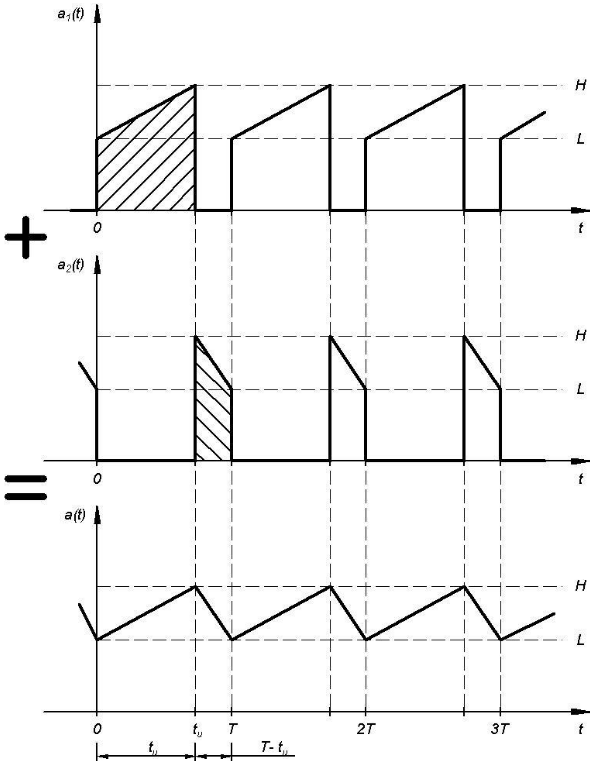


Рис. 13

Итак, мы получили выражения (28) и (29) с использованием формул (5) и (7). Проверим полученный результат путем непосредственного вычисления интегралов:

<u>*Среднее значение:*</u>

$$A_{сред} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_u}\left(L + \frac{H-L}{t_u}\cdot t\right)dt + \int_{t_u}^{T}\left(H - \frac{H-L}{T-t_u}\cdot(t-t_u)\right)dt\right] = \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_u} Ldt + \int_0^{t_u}\frac{H-L}{t_u}\cdot tdt + \int_{t_u}^{T} Hdt - \int_{t_u}^{T}\frac{H-L}{T-t_u}\cdot(t-t_u)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[L\cdot t\Big|_0^{t_u} + \frac{H-L}{t_u}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{t_u} + H\cdot t\Big|_{t_u}^{T} - \frac{H-L}{T-t_u}\cdot\frac{(t-t_u)^2}{2}\Big|_{t_u}^{T}\right] = \frac{1}{T}\left[L\cdot t_u + \frac{H-L}{t_u}\cdot\frac{t_u^2}{2} + H\cdot(T-t_u) - \frac{H-L}{T-t_u}\cdot\frac{(T-t_u)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[L\cdot t_u + \frac{H}{2}\cdot t_u - \frac{L}{2}\cdot t_u + H\cdot T - H\cdot t_u - \frac{H}{2}\cdot T + \frac{H}{2}\cdot t_u + \frac{L}{2}\cdot T - \frac{L}{2}\cdot t_u\right] = \frac{1}{T}\left[H\cdot T - \frac{H}{2}\cdot T + \frac{L}{2}\cdot T\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\left(\frac{H}{2} + \frac{L}{2}\right)\cdot T\right] = \frac{H+L}{2} \Rightarrow \underline{чтд}.$$

Среднеквадратичное значение:

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\underbrace{\int_0^{t_и}\left(L+\frac{H-L}{t_и}\cdot t\right)^2 dt}_{Выражение\_А} + \underbrace{\int_{t_и}^{T}\left(H-\frac{H-L}{T-t_и}\cdot(t-t_и)\right)^2 dt}_{Выражение\_Б}\right]}$$

Вычислим отдельно выражение ***А*** и выражение ***Б***:

$$Выражение\_А = \int_0^{t_и}\left(L+\frac{H-L}{t_и}\cdot t\right)^2 dt = \int_0^{t_и}\left(L^2+\frac{2L\cdot(H-L)}{t_и}\cdot t+\frac{(H-L)^2}{{t_и}^2}\cdot t^2\right)dt =$$

$$= \int_0^{t_и} L^2 dt + \int_0^{t_и}\frac{2L\cdot(H-L)}{t_и}\cdot tdt + \int_0^{t_и}\frac{(H-L)^2}{{t_и}^2}\cdot t^2 dt = L^2\cdot t\Big|_0^{t_и} + \frac{2L\cdot(H-L)}{t_и}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{t_и} + \frac{(H-L)^2}{{t_и}^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{t_и} =$$

$$= L^2\cdot t_и + \frac{2L\cdot(H-L)}{t_и}\cdot\frac{t_и^2}{2} + \frac{(H-L)^2}{{t_и}^2}\cdot\frac{t_и^3}{3} = t_и\cdot\left[L^2+L\cdot H-L^2+\frac{H^2-2H\cdot L+L^2}{3}\right] = t_и\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)$$

$$Выражение\_Б = \int_{t_и}^{T}\left(H-\frac{H-L}{T-t_и}\cdot(t-t_и)\right)^2 dt = \int_{t_и}^{T}\left(H^2-\frac{2H\cdot(H-L)}{T-t_и}\cdot(t-t_и)+\frac{(H-L)^2}{(T-t_и)^2}\cdot(t-t_и)^2\right)dt =$$

$$= \int_{t_и}^{T} H^2 dt - \int_{t_и}^{T}\frac{2H\cdot(H-L)}{(T-t_и)}\cdot(t-t_и)dt + \int_{t_и}^{T}\frac{(H-L)^2}{(T-t_и)^2}\cdot(t-t_и)^2 dt = H^2 t\Big|_{t_и}^{T} - \frac{2H\cdot(H-L)}{(T-t_и)}\cdot\frac{(t-t_и)^2}{2}\Big|_{t_и}^{T} +$$

$$+ \frac{(H-L)^2}{(T-t_и)^2}\cdot\frac{(t-t_и)^3}{3}\Big|_{t_и}^{T} = H^2\cdot(T-t_и) - H\cdot(H-L)\cdot(T-t_и) + \frac{(H-L)^2}{3}\cdot(T-t_и) = H^2\cdot(T-t_и) - (H^2-H\cdot L)\times$$

$$\times(T-t_и) + \frac{(H^2-2H\cdot L+L^2)}{3}\cdot(T-t_и) = (T-t_и)\cdot\left[H^2-H^2+H\cdot L+\frac{H^2-2H\cdot L+L^2}{3}\right] =$$

$$= (T-t_и)\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)$$

Подставляем вычисленные значения выражений ***А*** и ***Б***:

$$A_{срквад} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\underbrace{t_и\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)}_{Выражение\_А} + \underbrace{(T-t_и)\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)}_{Выражение\_Б}\right]} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[(t_и+T-t_и)\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[T\cdot\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)\right]} = \sqrt{\left(\frac{H^2+H\cdot L+L^2}{3}\right)} \Rightarrow \underline{чтд}$$

Таким образом, мы убедились, прямое вычисление интегралов дает тот же результат, что и применение формул (5) и (7) совместно с формулами (11) и (12).

Сложный закон изменения физической величины

В завершение данного документа рассмотрим пример вычисления среднего и среднеквадратичного значения относительно сложного периодического закона изменения физической величины, показанного на *Рис. 14*.

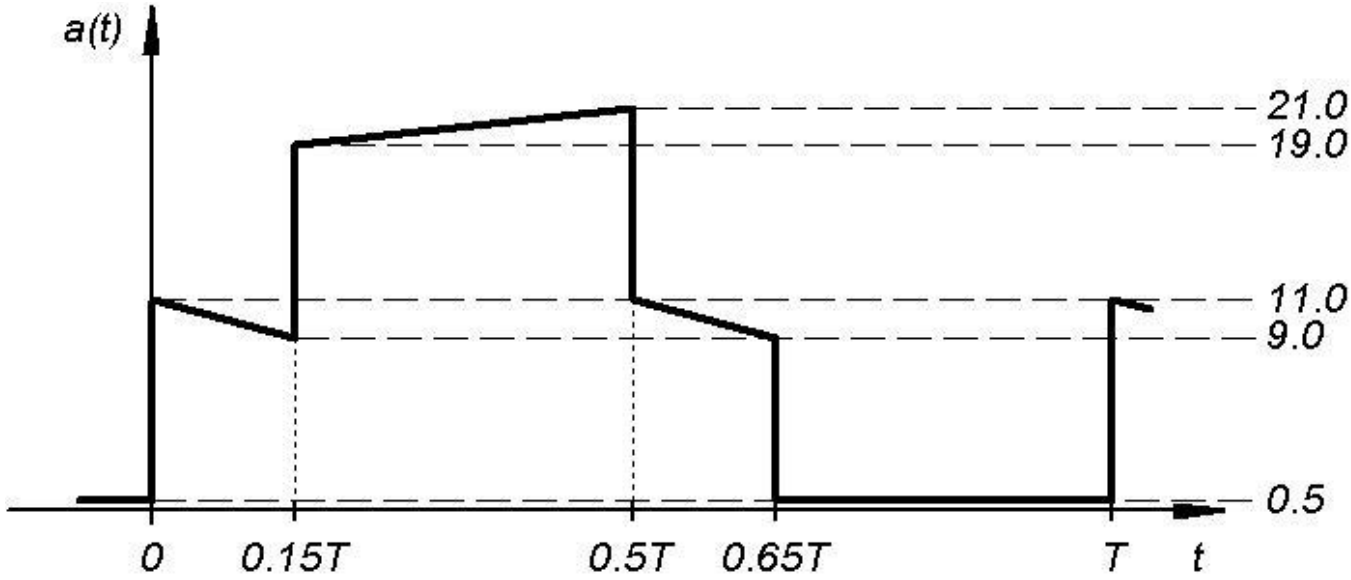


Рис. 14

Для вычисления требуемых параметров воспользуемся способом, предложенным в разделе *«Основные определения»* (*Рис. 2*, формулы (5), (7)), а именно – разложим исходный закон на несколько простейших («элементарных»), формулы для вычисления среднего и среднеквадратичного значений которых известны (см. предыдущие разделы документа). Как видно из *Рис. 14*, заданный сложный закон изменения может быть представлен в виде суммы трех «трапеций» (законы изменения 1, 2, 3) и одного «прямоугольника» (закон изменения 4), что иллюстрирует *Рис. 15*.

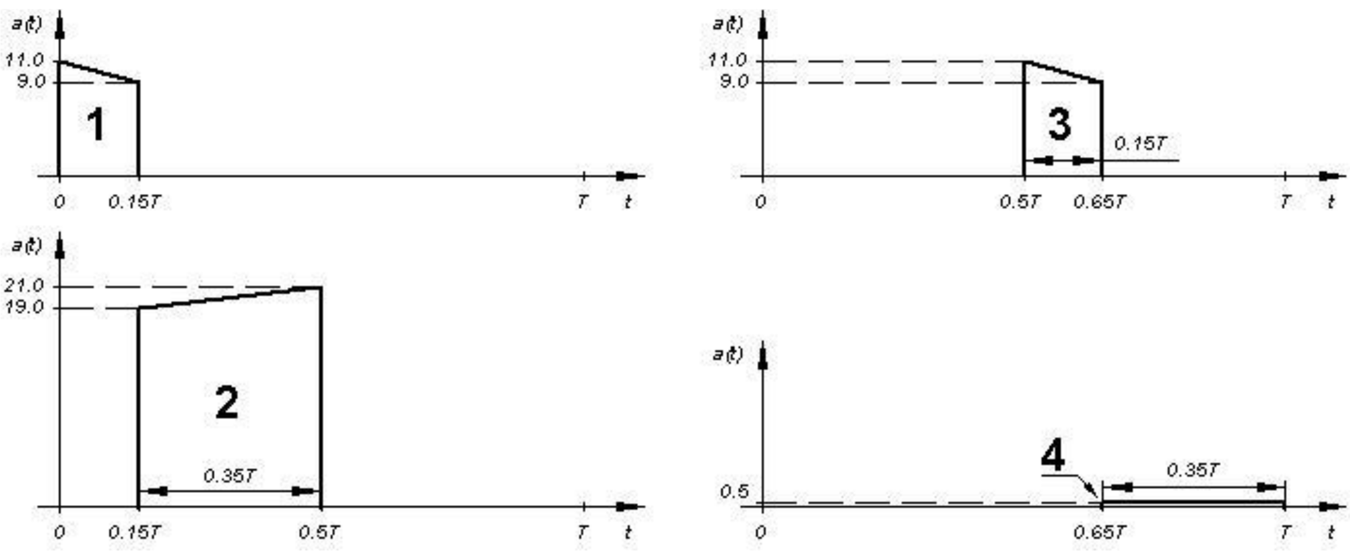


Рис. 15

Далее следует вычислить среднее и среднеквадратичное значения «элементарных» законов изменения физической величины.

Закон изменения №1

Как видно из *Рис. 15*, «элементарный» закон изменения №1 является частным случаем трапецеидального закона изменения (*Рис. 5*) со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} &H = 11; \\ &L = 9; \\ &C = 0; \\ &t_u = 0{,}15 \cdot T. \end{aligned} \qquad (30)$$

Поэтому для вычисления среднего значения рассматриваемого закона изменения физической величины можно использовать выражение (11) совместно с условием (30):

$$A_{сред1} = \frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H+L}{2}\right) + \left(1 - \frac{t_u}{T}\right) \cdot C = \frac{0{,}15 \cdot T}{T} \cdot \left(\frac{11+9}{2}\right) + \left(1 - \frac{0{,}15 \cdot T}{T}\right) \cdot 0 = 0{,}15 \cdot \left(\frac{20}{2}\right) = 1{,}5.$$

Для вычисления среднеквадратичного значения «элементарного» закона воспользуемся выражением (12) совместно с условием (30):

$$A_{срквад1} = \sqrt{\frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H^2 + L^2 + H \cdot L}{3}\right) + \left(1 - \frac{t_u}{T}\right) \cdot C^2} = \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot T}{T} \cdot \left(\frac{11^2 + 9^2 + 11 \cdot 9}{3}\right) + \left(1 - \frac{0{,}15 \cdot T}{T}\right) \cdot 0^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}15 \cdot \left(\frac{121+81+99}{3}\right)} = \sqrt{0{,}15 \cdot \left(\frac{301}{3}\right)} = \sqrt{0{,}15 \cdot 100{,}333} = \sqrt{15{,}05} = 3{,}879.$$

Закон изменения №2

Как видно из *Рис. 15*, «элементарный» закон изменения №2 является частным случаем трапецеидального закона изменения (*Рис. 4*) со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} &H = 21; \\ &L = 19; \\ &C = 0; \\ &t_u = 0{,}35 \cdot T. \end{aligned} \qquad (31)$$

Поэтому для вычисления среднего значения рассматриваемого закона изменения физической величины можно использовать выражение (11) совместно с условием (31):

$$A_{сред2} = \frac{t_u}{T} \cdot \left(\frac{H+L}{2}\right) + \left(1 - \frac{t_u}{T}\right) \cdot C = \frac{0{,}35 \cdot T}{T} \cdot \left(\frac{21+19}{2}\right) + \left(1 - \frac{0{,}35 \cdot T}{T}\right) \cdot 0 = 0{,}35 \cdot \left(\frac{40}{2}\right) = 0{,}35 \cdot 20 = 7.$$

Для вычисления среднеквадратичного значения «элементарного» закона воспользуемся выражением (12) совместно с условием (31):

$$A_{срквад2} = \sqrt{\frac{t_и}{T}\cdot\left(\frac{H^2+L^2+H\cdot L}{3}\right)+\left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C^2} = \sqrt{\frac{0{,}35\cdot T}{T}\cdot\left(\frac{21^2+19^2+21\cdot 19}{3}\right)+\left(1-\frac{0{,}35\cdot T}{T}\right)\cdot 0^2} =$$
$$= \sqrt{0{,}35\cdot\left(\frac{441+361+399}{3}\right)} = \sqrt{0{,}35\cdot\left(\frac{1201}{3}\right)} = \sqrt{0{,}35\cdot 400{,}333} = \sqrt{140{,}117} = 11{,}837.$$

Закон изменения №3

Как видно из *Рис. 15*, значения параметров «элементарного» закона изменения №3 полностью идентичны параметрам закона №1 (условие (30)). Поэтому среднее и среднеквадратичное значения этого закона также совпадут с соответствующими значениями закона №1:

$$A_{сред3} = A_{сред1} = 1{,}5;$$
$$A_{срквад3} = A_{срквад1} = 3{,}879.$$

Закон изменения №4

Как видно из *Рис. 15*, «элементарный» закон изменения №4 является частным случаем прямоугольного закона изменения (*Рис. 7*) со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} H &= 0{,}5;\\ C &= 0; \qquad .\\ t_и &= 0{,}35\cdot T. \end{aligned} \tag{32}$$

Поэтому для вычисления среднего значения рассматриваемого закона изменения физической величины можно использовать выражение (17) совместно с условием (32):

$$A_{сред4} = \frac{t_и}{T}\cdot H+\left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C = \frac{0{,}35\cdot T}{T}\cdot 0{,}5+\left(1-\frac{0{,}35\cdot T}{T}\right)\cdot 0 = 0{,}35\cdot 0{,}5 = 0{,}175.$$

Для вычисления среднеквадратичного значения «элементарного» закона воспользуемся выражением (18) совместно с условием (32):

$$A_{срквад4} = \sqrt{\frac{t_и}{T}\cdot H^2+\left(1-\frac{t_и}{T}\right)\cdot C^2} = \sqrt{\frac{0{,}35\cdot T}{T}\cdot 0{,}5^2+\left(1-\frac{0{,}35\cdot T}{T}\right)\cdot 0^2} = \sqrt{0{,}35\cdot 0{,}25} = \sqrt{0{,}0875} = 0{,}296.$$

И теперь мы располагаем всеми данными для нахождения среднего и среднеквадратичного значений сложного закона изменения физической величины, изображенного на *Рис. 14*. Среднее значение находится по формуле (5):

$$A_{сред} = A_{сред1}+A_{сред2}+A_{сред3}+A_{сред4} = 1{,}5+7+1{,}5+0{,}175 = 10{,}175.$$

Среднеквадратичное значение находится по формуле (7):

$$A_{срквад} = \sqrt{A^2_{срквад1}+A^2_{срквад2}+A^2_{срквад3}+A^2_{срквад4}} = \sqrt{3{,}879^2+11{,}837^2+3{,}879^2+0{,}296^2} =$$
$$= \sqrt{15{,}047+140{,}115+15{,}047+0{,}088} = 13{,}05.$$

Для проверки полученного результата можно использовать широко распространенное бесплатное ПО LTSpice IV от компании Linear Technology Corporation (LTC). Сгенерировав сигнал с требуемыми параметрами, измерим в эмуляторе среднее и среднеквадратичное его значение за 5 периодов (*Рис. 16*).

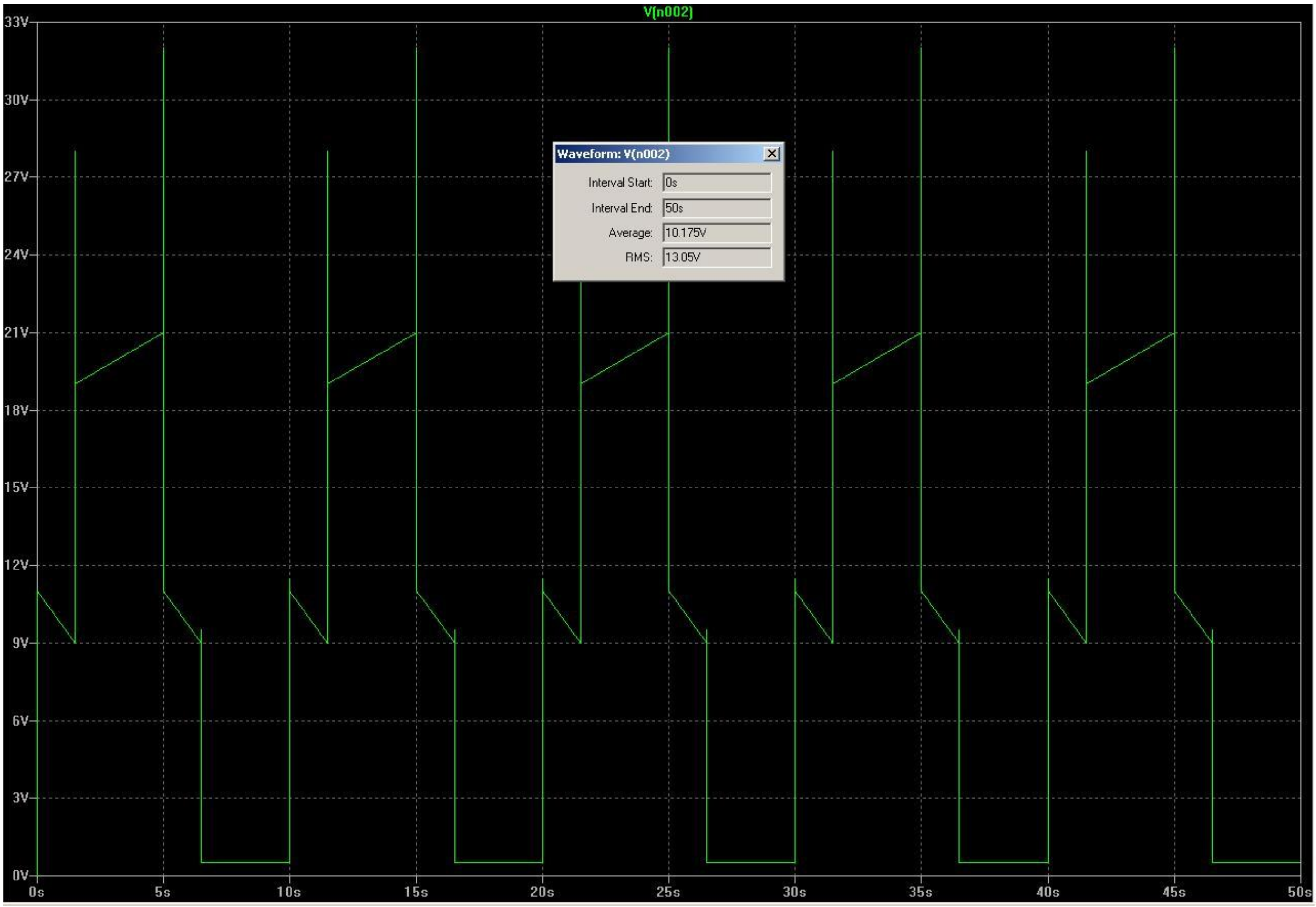


Рис. 16

Как видим, результаты работы эмулятора полностью совпадают с расчетными значениями.

История изменений документа

Версия документа	*Дата*	*Изменение*	*Стра-ница*
1.0	03.12.12	Первая редакция документа	-